



# Olympiades nationales de mathématiques

2018

## Deuxième partie de l'épreuve : exercices académiques 10h10 à 12h10

L'usage des calculatrices est autorisé conformément à la réglementation en vigueur.

Les candidats traitent **deux exercices** par groupes de 2 ou 3 :

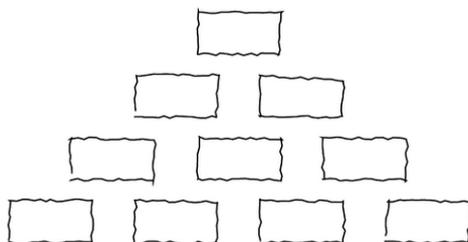
- Les candidats de la série S traitent les exercices numéros 5 (*Le nageur et le chien*) et 6 (*Dessine-moi un nombre*).
- Les candidats des autres séries traitent les exercices numéros 4 (*Les n-pyramides*) et 6 (*Dessine-moi un nombre*) .

Les copies concernant ces exercices académiques seront ramassées au plus tard à 12 h 10.

## Exercice académique numéro 4 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

### Les n-pyramides

On place des briques comme ci-contre de manière pyramidale.

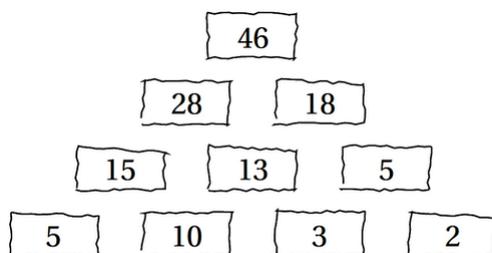


On appelle n-pyramide une pyramide à n-lignes telle que :

Chaque brique contient un nombre entier non nul

- Tout nombre inscrit sur une brique est égal à la somme des deux nombres des deux briques inférieures adjacentes.

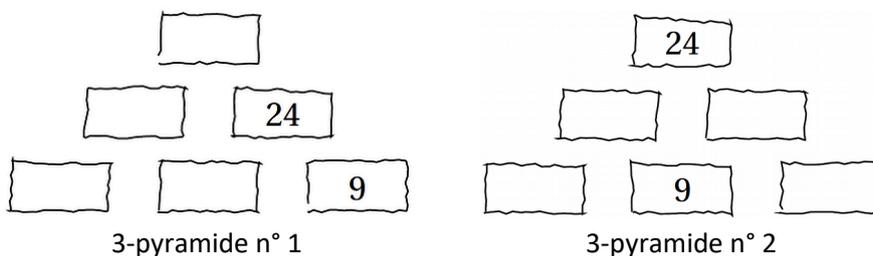
Voici un exemple de 4-pyramide :



L'objectif de cet exercice est de s'intéresser aux nombres de façons de compléter certaines n-pyramides. Dans cet exercice, les trois parties sont indépendantes.

#### 1) Partie 1 : Les 3-pyramides

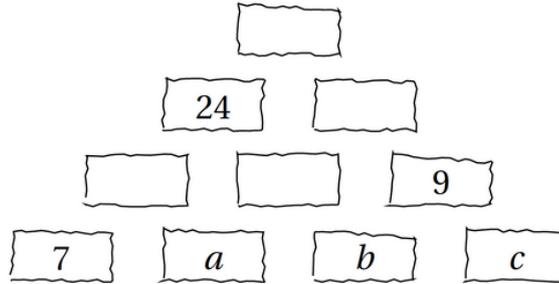
On considère les 3-pyramides incomplètes suivantes :



- Recopier sur votre copie un exemple de chacune de ces deux 3-pyramides correctement complétées.
- Montrer qu'il existe une infinité de façons de compléter la 3-pyramide n°1.
- Montrer que le nombre de façons de compléter la 3-pyramide n°2 est fini.
- On considère une 3-pyramide contenant les nombres **24** et **9**.  
Déterminer les positions possibles des nombres **24** et **9** permettant d'obtenir une infinité de façons de compléter la 3-pyramide ainsi créée.

2) **Partie 2 : Les 4-pyramides**

On considère la 4-pyramide suivante incomplète où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des entiers non nuls :



On cherche à déterminer l'ensemble des nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$  permettant de compléter cette 4-pyramide.

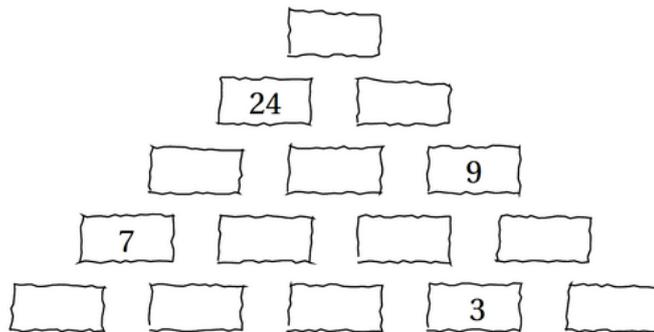
- a) Recopier un exemple de cette 4-pyramide correctement complétée. Justifier votre réponse.
- b) Justifier que  $a$ ,  $b$  et  $c$  doivent vérifier le système :

$$\begin{cases} b+c=9 \\ 2a+b=17 \end{cases}$$

- c) Déterminer alors les triplets  $(a,b,c)$  permettant de compléter cette 4-pyramide.

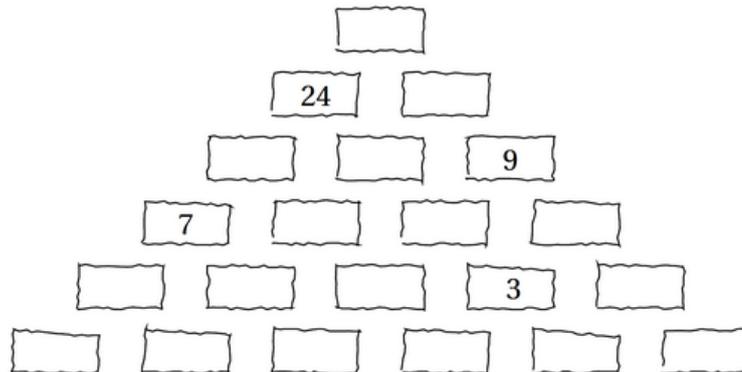
3) **Partie 3 : Pour finir, une 5-pyramide et... une 6-pyramide**

- 1) On considère la 5-pyramide incomplète suivante :



Combien existe-t-il de façons de compléter cette 5-pyramide ?

- 2) On considère la 6-pyramide ci-dessous, obtenue à partir de la 5-pyramide précédente :



Montrer qu'il n'est pas possible de compléter correctement une telle 6-pyramide.

## Exercice académique numéro 5 (à traiter uniquement par les candidats de la série S)

### Le nageur et son chien

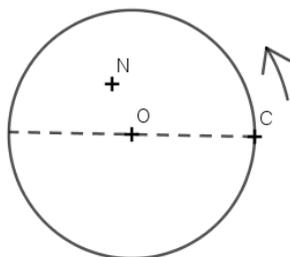
Un nageur se situe au centre  $O$  d'un étang circulaire de rayon  $R$  ( $R$  exprimé en mètres).

Au bord de l'étang l'attend un chien. Le chien et le nageur se déplacent à vitesse constante.

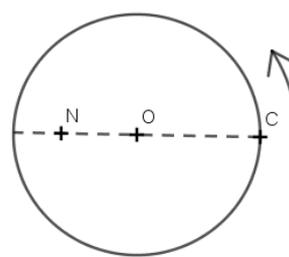
Le chien court à la vitesse  $V$  en m/s et le nageur nage à la vitesse de  $v$  en m/s. On suppose  $v < V$ .

Les déplacements du chien s'effectuent de la façon suivante :

Si, lorsque le chien regarde le point  $O$  le nageur se trouve situé à sa droite, le chien ira vers la droite en suivant le bord de l'étang, sinon, il ira vers la gauche en suivant le bord de l'étang.



Si le chien, le point  $O$  et le nageur sont alignés dans cet ordre, où si le point  $O$  et le nageur confondus, le chien ira vers la droite.



Dans le cas particulier où le chien, le nageur et point  $O$  sont alignés dans cet ordre le chien ne bougera pas.

Le nageur quant à lui, souhaite atteindre le bord de l'étang en un point quelconque avant que le chien n'atteigne ce point.

Le plan est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  tel qu'au début de la poursuite, le chien se trouve au point  $A=(R;0)$  et le nageur au point  $O(0;0)$ . On notera  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ .

#### I. Stratégie n° 1

Le nageur se dirige en ligne droite vers la rive pour rejoindre le point  $A'(-R; 0)$ .

#### Partie A

On suppose que l'étang a un rayon de 100 m.

1. On se place dans le cas où  $v=1$  m/s et  $V=3$  m/s
  - a) Faire une figure en représentant le cercle  $\mathcal{C}$ , le point  $A$ , le point  $A'$  et le trajet du nageur.
  - b) Le chien rattrapera-t-il le nageur ? Justifier la réponse.
2. On se place dans le cas où  $v = 1$  m/s et  $V = 4$  m/s. Le chien rattrapera-t-il le nageur ?

#### Partie B

On se place dans un étang de rayon  $R$  quelconque

1. Faire une figure.
2. Quel sera, en fonction de  $v$  et de  $R$ , le temps mis par le nageur pour atteindre la rive ?
3. Comment le chien se déplacera-t-il ? Quel sera, en fonction de  $V$  et de  $R$ , le temps qu'il mettra pour atteindre  $A'$  ?
4. Que pensez vous de cette stratégie en fonction des valeurs du rapport  $\frac{V}{v}$  ?
5. Le nageur a-t-il intérêt à prendre cette stratégie si  $V = 4v$  ?

## II. Stratégie n° 2

On note :

- $r' = \frac{v}{2V} R$
- F le point de coordonnées  $F(0; -2r')$ ,
- $O'$  le point de coordonnées  $O'(0; -r')$ .

Le nageur parcourt tout d'abord le demi-cercle  $\mathcal{C}'$  de centre  $O'$  et de rayon  $r'$  dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, en partant de O pour atteindre F. Il rejoint ensuite le point  $G(0; -R)$ .

Dans cette question,  $v=1\text{m/s}$  et  $V=2\text{m/s}$

1. Faire une figure en indiquant clairement le trajet suivi par le nageur.  
Quelle est la longueur de ce trajet ? Le chien rattrapera-t-il le nageur ?
2. Dans le cas général, exprimer en fonction de  $R, v, V$  le temps que mettra le nageur pour atteindre la rive en suivant ce trajet.
3. Soit N un point quelconque situé sur le demi cercle  $\mathcal{C}'$ .

On note C le point d'intersection du cercle  $\mathcal{C}$  avec la demi-droite  $[N; O)$  et l'on considère les angles

$$\alpha = \widehat{AOC} \quad \text{et} \quad \beta = \widehat{OO'N}$$

- a) Montrer que  $\alpha = \widehat{OFN}$  puis que  $\beta = 2\alpha$ .
- b) En déduire que, lorsque le nageur se situe au point N, le chien se situe au point C.
- c) Que pensez vous de cette stratégie en fonction du rapport  $\frac{V}{v}$ .
- d) Le nageur a-t-il intérêt à prendre cette stratégie si  $V = 4v$  ?

## Exercice académique numéro 6 (à traiter par tous les candidats)

### Dessine-moi un nombre

L'algorithme ci-dessous a pour objectif de tracer des figures à l'aide des chiffres formant un nombre écrit sous forme décimale :

Il faut fournir à l'algorithme un nombre décimal  $x$  avec  $0 \leq x < 10$

Le nombre  $x$  est écrit sous la forme :  $u_0.u_1u_2u_3\dots u_n$ .

Le nombre  $u_i$  représente ainsi la  $i^{\text{ème}}$  décimale et le nombre  $u_0$  la partie entière du nombre  $x$ .

L'algorithme déplacera une «tortue » qui tracera la figure. **Un exemple est proposé en fin d'énoncé.**

$i \leftarrow 0$

Tant que  $u_i$  existe :

Tourner la tortue de l'angle indiqué dans le tableau en fonction de la valeur de  $u_i$

Avancer la tortue d'une unité

$i \leftarrow i+1$

Fin Tant que

Valeur de $u_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Angle	$0^\circ$	$0^\circ$	$45^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$	$180^\circ$
Orientation			gauche	droite	gauche	droite	gauche	droite		

#### Partie I

- Tracer la figure obtenue en fournissant le nombre 0,3333722 .
- Proposer un nombre à fournir en entrée à l'algorithme pour obtenir la figure ci-dessous.



En existe-t-il d'autres ?

- Tracer la figure obtenue en fournissant le nombre 3,5454.

#### Partie II

- On note  $s$  le nombre 3,545454... où le « 54 souligné » et les pointillés signifient que « 54 » est répété indéfiniment.
  - Résoudre l'équation :  $(x - 3) \times 100 - 54 = x - 3$  puis vérifier que le nombre  $s$  est solution de cette équation.
  - En déduire l'écriture de  $s$  sous forme de fraction.
  - Cette fraction permet d'obtenir la figure de la question I.3 de façon illimitée.
- Tracer la figure obtenue avec la solution de l'équation :  $(x - 5) \times 10^6 - 655\,560 = x - 5$  .

3. On souhaite obtenir la figure ci-dessous qui se continue de façon illimitée (cette figure s'appelle une grecque)



- a. Donner l'écriture décimale d'un nombre à fournir à l'algorithme pour obtenir cette figure.  
 b. En déduire l'écriture fractionnaire de ce nombre.

**Exemple**

Si on fournit le nombre 3,147

	$u_0 = 3$	$u_1 = 1$	$u_2 = 4$	$u_3 = 7$
	On tourne de $45^\circ$ vers la droite pour obtenir:	Sans tourner, on avance d'une unité	On tourne de $90^\circ$ vers la gauche et on avance d'une unité	On tourne de $135^\circ$ vers la droite et on avance d'une unité
Position et orientation initiale				

A partir du nombre 3,147, on obtient donc la figure :

