

Animation Mathématiques n° 2
Cycle 3 - 2010/2011

Fractions et décimaux

Document de synthèse suite aux animations pédagogiques de circonscription

Enjeux de cet apprentissage

- Découvrir les fractions et les nombres décimaux comme de nouveaux nombres
*Les fractions et les nombres décimaux doivent d'abord apparaître comme de **nouveaux nombres, utiles pour résoudre des problèmes que les nombres entiers ne permettent pas de résoudre de façon satisfaisante** : problèmes de partage, de mesure de longueurs ou d'aires, de repérage d'un point sur une droite. (Doc d'application des programmes 2002 - Maths Cycle 3 - p. 21)*
- Débuter l'apprentissage par une première approche des fractions pour favoriser la compréhension des nombres décimaux
- Les utiliser en tant qu'outils avant d'en aborder l'étude formelle (aspect objet).
Ex : Utilisation des fractions et des décimaux dans la vie courante : lecture de l'heure, quantité (1/2 pain), mesures (1,30 m), prix (1,15 €) ...

Un bref rappel historique

- Première représentation des fractions chez les Sumériens, vers 3000 avant J.C., pour des cas particuliers : $1/120$; $1/60$; $1/30$; $1/10$; $1/5$.
- Les Babyloniens (-2000) utilisent également des cas particuliers de fractions. Ils inventent le système sexagésimal (base 60). Dans cette écriture, les fractions se représentent avec des dénominateurs de 60 ou 3600 (60^2). Les nombreux diviseurs de 60 permettent de représenter facilement les fractions $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/6$, $1/12$, $1/15$, $1/20$ ou $1/30$. Ce système s'est perpétué jusqu'à nous, par l'astronomie, pour les mesures sexagésimales de temps et d'angle.
- L'Égypte antique va développer l'héritage présocratique mésopotamien. Les Égyptiens n'utilisent que des fractions unitaires (fractions dont le numérateur est égal à UN). Ils représentent les fractions de type $1/n$ (fractions unitaires) en plaçant un symbole (la bouche) au dessus du dénominateur. Les fractions les plus simples : $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, $1/32$... étaient représentées avec un élément de l'œil d'Horus qui symbolisait la fraction. Cet œil correspondait à l'unité et était ainsi partagé.
- En Occident :
 - Au XIV^{ème} siècle, le mathématicien français Nicole Oresme (1325 ; 1382) emprunte la notation des fractions avec barre aux arabes. Il définit pour la première fois les termes « numérateur » et « dénominateur ».
 - Au XIV^{ème} siècle, le mathématicien français Nicole Oresme (1325 ; 1382) emprunte la notation des fractions avec barre aux arabes. Il définit pour la première fois les termes « numérateur » et « dénominateur ».
 - Au XVI^{ème} siècle, un autre français, François Viète (1540 ; 1603), incite à l'usage des fractions décimales à la place des fractions sexagésimales.
 - Avec les fractions décimales, le belge Simon Stevin (1548 ; 1620) donne naissance aux nombres décimaux dont l'écriture en ligne est plus commode pour les calculs. Il propose une convention pour écrire les fractions décimales ... mais sans la virgule encore.
 - Dès le début du XVII^{ème} siècle se répand la notation moderne avec le point décimal et la virgule.

Fractions et décimaux

Document de synthèse suite aux animations pédagogiques de circonscription

Fractions et décimaux : simple et complexe à la fois

Simple : les fractions ont été inventées pour :

- répondre à un problème de précision
- pouvoir exprimer une quantité intermédiaire entre deux entiers

Complexe : ces nouvelles notions génèrent des difficultés liées à :

1 - Des représentations fausses qui perdurent

Confusions :

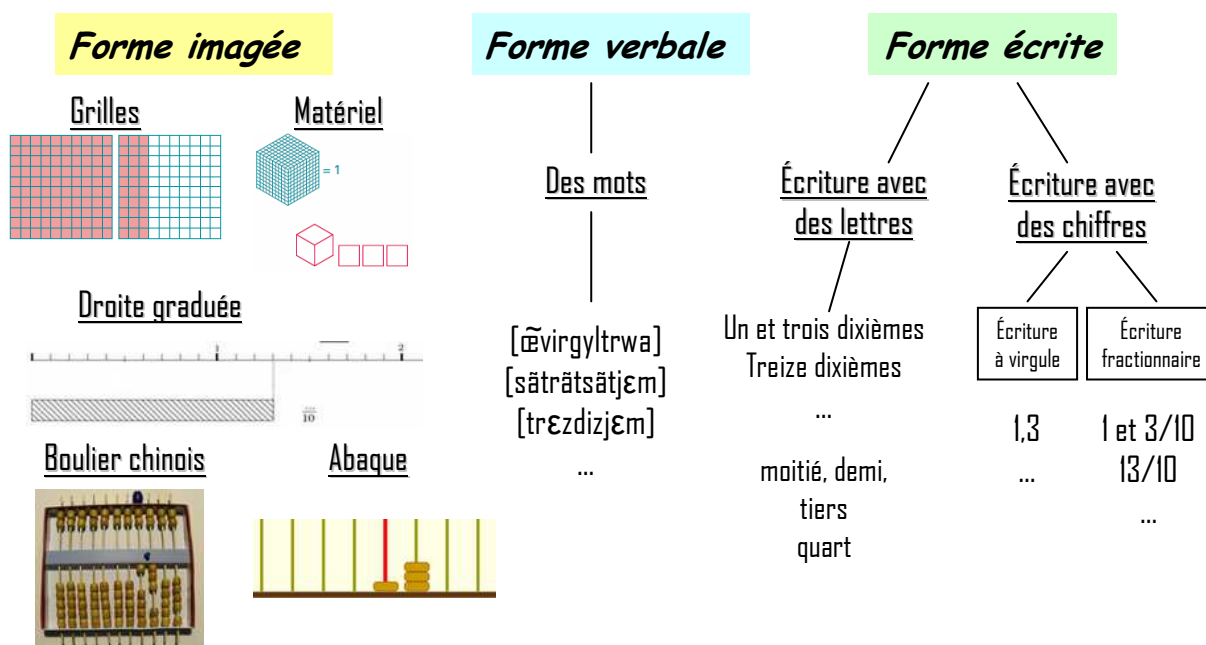
- dixième / dizaine ; centième / centaine. La ressemblance de ces mots entraîne des erreurs s'agissant de la valeur de position de chaque chiffre. Ces mots désignent des rangs, des positions, plutôt que des valeurs.
- 3 cinquièmes qu'on peut confondre avec l'ordinal cinquième.

Représentation fautive : un décimal, c'est deux entiers séparés par une virgule ; ...

2 - Rupture entre entiers et décimaux

- **1ère rupture** : l'idée de successeur n'a plus de sens pour les décimaux ;
- **2ème rupture** : entre deux entiers, il y a un nombre fini d'entiers ; entre deux décimaux, il y a une infinité de décimaux ;
- **3ème rupture** : les règles de comparaison des décimaux sont différentes de celles qui ont été institutionnalisées sur les entiers.

3 - Diverses représentations des nombres



L'accompagnement langagier et les décimaux

Ne pas trop systématiser la lecture " sociale " des décimaux (2,5 → 2 virgule 5) qui tend à faire croire qu'un décimal est la juxtaposition de 2 entiers, séparés par une virgule.

Privilégier la lecture en dixièmes, centièmes.... (2 et cinq dixièmes, 25 dixièmes) ; trouver le plus de façons de dire le nombre, notamment sous forme de fractions décimales.

On passe souvent trop vite à l'utilisation des nombres à virgule en abandonnant trop rapidement l'utilisation des nombres fractionnaires.

Dans les progressions et les programmations, ne pas faire un bloc « fractions » et un bloc « nombres décimaux » où les fractions décimales ne sont qu'une transition entre les 2 blocs. Planifier les alternances entre les deux écritures.

Les indispensables à une bonne construction des nombres fractionnaires et décimaux

1 - La droite graduée

La droite graduée est un support à privilégier pour l'étude des nouveaux nombres.

- Elle permet de représenter tout intervalle entre deux nombres, aussi grand ou aussi petit que soit cet intervalle
- Elle contient tous les nombres de l'intervalle représenté mais on a le choix de ne donner que quelques repères (les petits traits) et/ou désigner explicitement seulement les nombres dont on a besoin.
- C'est une ligne qui modélise la suite des nombres et les relations arithmétiques entre les nombres quand les espaces choisis sont proportionnels aux nombres représentés.
- Sa représentation doit toujours conserver l'aspect ordinal.

Jusqu'au CE2, la droite graduée est un support pour représenter les nombres entiers, l'ordre sur ces nombres, effectuer certains calculs. Puis :

- utiliser la droite numérique pour y représenter des résultats de mesures
- fréquenter de nouveaux nombres dans un contexte de mesure
- comparer ces nouveaux nombres
- savoir les situer par rapport aux entiers
- savoir placer ces nombres entre deux entiers.

Au CM1, l'utilisation de la droite graduée est étendue d'abord à la représentation des fractions, à l'ordre sur les écritures fractionnaires et à des calculs élémentaires, pour :

- exprimer le résultat des mesurages de longueurs, une unité étant donnée
- repérer des positions ou exprimer des intervalles

1 unité							
1/2				1/2			
1/4		1/4		1/4		1/4	
1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

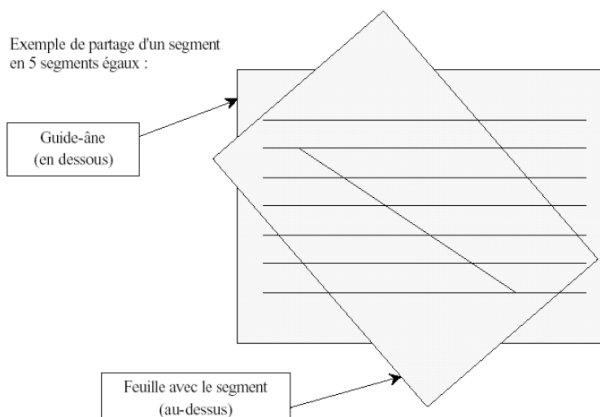
Animation Mathématiques n° 2 Cycle 3 - 2010/2011

Fractions et décimaux

Document de synthèse suite aux animations pédagogiques de circonscription

Utilisation d'un outil : le guide-âne

- ❖ Les enfants vont découvrir et utiliser un dispositif simple permettant le partage équitable d'un segment.



Au CM2, l'utilisation de la droite graduée est prolongée pour des activités concernant le passage des écritures fractionnaires aux écritures à virgule, dans un sens comme dans l'autre.

2 - Le tableau de numération

De manière à ne pas figer les représentations des élèves, utiliser très tôt dans la scolarité un tableau de numération « ouvert » qui suggère que celui-ci peut être complété par des colonnes supplémentaires à gauche ou à droite.

Milliers			Unités simples			Partie décimale	
c	d	u	c	d	u	1/10	1/100

Construire le tableau de numération avec les élèves

- En référence aux décompositions du type :

$$3642/100 = (3 \times 10) + 6 + (4 \times 1/10) + (2 \times 1/100)$$
 Introduire l'écriture : $36 + 42/100 = 36,42$
- A partir du tableau de numération utilisé pour travailler les entiers :
 - Poser le problème d'écrire ce nombre dans le tableau.
 - Montrer la nécessité d'ajouter des colonnes pour la partie décimale

Milliers			Unités simples			Partie décimale	
c	d	u	c	d	u	1/10	1/100

3 - Un outil : le boulier chinois

Le boulier aide à la mise en place et l'utilisation d'algorithmes de calcul, que l'élève pourra réinvestir lors de calculs réfléchis ou mentaux. Son utilisation peut permettre d'appréhender les décimaux sous un angle différent.

Suite aux animations pédagogiques, un récapitulatif de l'utilisation du boulier chinois, une utilisation directe en ligne et une fiche de fabrication sur :

<http://groupes-premier-degre-36.tice.ac-orleans-tours.fr/eva/spip.php?article117>

Animation Mathématiques n° 2
Cycle 3 - 2010/2011

Fractions et décimaux

Document de synthèse suite aux animations pédagogiques de circonscription

Calculs et décimaux

Calcul posé

L'élève passe par l'écrit, cet écrit est codifié (présentation liée à la numération de position) et répond à un algorithme de calcul.

Calcul mental

Parler de calcul mental ne signifie pas que tout se passe sans écrire. Ce qu'on désigne sous le terme de calcul écrit ("l'opération posée") requiert la connaissance des tables et la gestion des retenues, donc du calcul mental. Il ne dispense donc pas de calculer mentalement, bien au contraire. Le déficit de maîtrise du calcul mental fragilise gravement l'apprentissage des techniques écrites.

Deux parties dans le calcul mental :

- Calcul automatisé : ce qu'il faut mémoriser ou automatiser (les tables, quelques doubles et moitiés, le calcul sur les dizaines et les centaines entières, les compléments à la dizaine supérieure, ...)
- Calcul réfléchi : ce qu'il faut être capable de reconstruire (et qui relève du calcul réfléchi : idée de rendre plus simple un calcul, souvent en procédant par étapes plus nombreuses, mais en s'appuyant sur ce qui est connu)

Les enjeux du calcul mental

- Fonction sociale : permet de mettre en place des moyens efficaces de calculer dans la vie courante en l'absence de supports ou d'instruments.
- Fonction pédagogique :
 - renforcement de la structure arithmétique des nombres (relations additives et multiplicatives entre les nombres)
 - les propriétés des opérations (commutativité, distributivité, associativité)
 - la construction de certaines notions mathématiques s'appuie sur le calcul mental
 - le calcul réfléchi développe les capacités de raisonnement des élèves

Progressions pour le calcul mental

<http://groupes-premier-degre-36.tice.ac-orleans-tours.fr/eva/spip.php?article108>

Fractions et nombres décimaux : Progression sur le cycle

<http://groupes-premier-degre-36.tice.ac-orleans-tours.fr/eva/spip.php?article110>

Animation Mathématiques n° 2
Cycle 3 - 2010/2011

Fractions et décimaux

Document de synthèse suite aux animations pédagogiques de circonscription

Un tableau comparatif des principaux manuels

	POUR COMPRENDRE LES MATHÉMATIQUES	CAP MATH	DIAGONALE	J'APPRENDS LES MATHS	PLACE AUX MATHS	LA TRIBU DES MATHS
Activités préparatoires	Calcul mental : moitié, tiers, quart (sur des nombres)	Calcul mental : moitié, tiers, quart Parts de gâteaux		Sens de la division : quotité et partition	Pliage de bandes ; guide-âne	Fractions et mesures de capacité (situation de recherche) + lien avec vie quotidienne
Fractions1 Supports découverte	Fractionnement d'une aire inférieure à l'unité	Fractions et mesures de longueur : construire des bandes (ex : 2<band<3)	Fractionnement d'une aire inférieure à l'unité Technique pour fractionner un segment	Division / Fraction avec partage du reste Introduction du signe /	Mesures de longueur ; codage de points < ou > 1 ; construction de bandes ; fractions complémentaires à 1	Fractions et mesures de longueur : construire des bandes (notion de segment unité)
Fractions 2	Utiliser des fractions pour coder des mesures de longueur (fractions inférieures ou supérieures à l'unité)	Fractionner des durées et des aires	Utiliser des fractions pour coder des mesures de longueur (fractions inférieures ou supérieures à l'unité) exercices sur des fractions en dixièmes, extraction des unités	Fractionnement de la pluralité Fractionner l'unité en parts égales	Partie entière d'une fraction ; fractions équivalentes ; codage de points	Utiliser des fractions pour lire l'heure
Fractions 3	Placer des fractions sur une droite numérique – Écrire des fractions sous la forme d'un entier + une fraction	Utiliser des fractions pour graduer une ligne		2 pizzas divisées entre 3 personnes, c'est la même chose que $\frac{2}{3}$ d'une pizza.	Coloriage de bandes ou de rectangles ; jeux avec les drapeaux ; fractions d'une aire	Fractions et aires (fractionner une surface)
Fractions 4		Décomposer des fractions en utilisant des nombres entiers (lien avec la division)	Placer des fractions sur une droite numérique – Écrire des fractions sous la forme d'un entier + une fraction décimale	Partager une longueur en n longueurs égales Comparer des fractions inférieures à l'unité Utiliser des écritures équivalentes avec dénominateur 10 ou 100 Fractionner l'unité en parts égales Fraction > ou < à 1	Activités préparatoires : course de vitesse chronométrée en 10e et 100e	Codage et décodage de fractions relatives à des figures coloriées. Correspondance écriture chiffrée et littérale
Fractions décimales 1	Lire, écrire une fraction décimale sur une droite graduée	Fractions décimales égales à d'autres fractions		Somme de fractions décimales	Fractions décimales égales à d'autres fractions ; transformation de fractions en fractions décimales	Utilisation de quadrillages pour aborder les fractions décimales. Fractions décimales égales à d'autres fractions
Fractions décimales 2	Décomposer une fraction décimale (en unité + dixièmes, unités + centièmes) ... Équivalence des écritures	Egalités entre fractions décimales et extraction des unités : savoir décomposer les fractions décimales		Équivalence entre notation fractions et notation sous forme de décimaux : usage de la calculatrice	Comparaison de fractions décimales ; addition de durées et de mesures	Utiliser le partage de segments en segments égaux
Fractions et mesures	Utiliser les fractions simples dans les mesures (sans les décimaux)	Placer les fractions sur une droite graduée		Écritures décimales pour exprimer des mesures		Fractions décimales et mesures de durée, de masse et de monnaie

Animation Mathématiques n° 2

Cycle 3 - 2010/2011

Fractions et décimaux

Document de synthèse suite aux animations pédagogiques de circonscription

	POUR COMPRENDRE LES MATHÉMATIQUES	CAP MATH	DIAGONALE	J'APPRENDS LES MATHS	PLACE AUX MATHS	LA TRIBU DES MATHS
Décimaux 1	Écrire les fractions sous forme d'un décimal et inversement	Écriture de la fraction sous la forme d'un décimal Écriture de la décomposition sous une autre forme	Écrire les fractions sous forme d'un décimal et inversement Placer les décimaux sur une droite graduée	Comparaisons de décimaux	Écriture de la fraction sous la forme d'un décimal ; relier les 2 écritures d'un même nombre	Transformer les fractions décimales en nombres décimaux et inversement
Décimaux 2	Comparer, encadrer par des entiers	Nombres décimaux et graduations	Équivalence des écritures différentes des décimaux		Comparer, encadrer par des entiers, intercaler un nombre ; ranger une série de nombres	1ers calculs (décimaux et fractions) et comparaison, utilisation de la règle graduée
Décimaux 3		Manipuler, connaître les relations entre unités dixièmes centièmes	Idem avec écritures fractionnaires en plus			Résoudre des problèmes intégrant des fractions ou des nombres décimaux
Décimaux 4		Comparaison de surface Comparer, intercaler des décimaux Utilisation de la droite pour intercaler	Comparer, intercaler des décimaux			
Opérations sur les décimaux	Somme / différence	Somme / différence	Somme / différence	Somme / différence	Somme / différence	Somme puis différence (après multiplication)
Opérations sur les décimaux	Multiplier ou diviser par 10, 100 ou 1000		Multiplier un décimal par un entier	Multiplier un décimal par un entier	Multiplier un décimal par un entier	Multiplier un décimal par un entier
Caractéristique progression	Progression « standard » sur les décimaux	Très forte utilisation de la droite numérique: moyen le plus utilisé Cap math insiste sur la décomposition des fractions décimales de manière à extraire dixièmes, centièmes, millièmes	On passe très vite à la fraction décimale (2ème séance) et à la décomposition de fractions décimales sous forme unités + dixièmes (3ème séance)	Introduction précoce de / Partage de la pluralité Partage de l'unité	Progression « standard » sur les décimaux + liens avec des situations concrètes	
Lien division / fraction	Le lien est fort entre fraction décimale et décimaux mais inexistant entre division et fraction	Recherche très fréquente d'équivalence de fractions Relation entre division et fraction grâce à l'extraction des unités Lien direct avec la division peu explicite		Le lien avec la division est à la base de la progression	Aucun lien entre fraction et division (uniquement partage de l'unité)	
Comparaison des décimaux	Propose un algorithme de comparaison des décimaux	Beaucoup basé sur les suites en ordre croissant	Propose un algorithme de comparaison des décimaux	Comparaison de fractions décimales intégrée à la comparaison des décimaux		Comparaison de fractions (demis, 5e), fractions décimales et nombres décimaux. Propose un algorithme de comparaison des décimaux
Multiplication des décimaux	X 10 un décimal reprend le passage à l'entier		Pour multiplier par 10, on présente le décimal sous forme de fraction	Pour multiplier par 10, on présente le décimal sous forme de fraction		

Animation Mathématiques n° 2
Cycle 3 - 2010/2011

Fractions et décimaux

Document de synthèse suite aux animations pédagogiques de circonscription

Socle commun : palier 2 et Livret personnel de compétences

Le Ministère a publié les grilles de références pour la validation des compétences du socle commun. Elles sont en adéquation complète avec les programmes 2008.

Ces grilles sont téléchargeables sur EDUSCOL et à partir des sites de circonscription.

<http://eduscol.education.fr>

Bibliographie - Sitographie

- Fiches d'activité Jeux sur les nombres, fractions et décimaux, calculettes :
<http://eduscol.education.fr/cid47905/fiches-d-activite.html>

- Sites de jeux :
<http://matoumatheux.ac-rennes.fr/accueil.htm>
<http://mathenpoche.sesamath.net/>
<http://netia59a.ac-lille.fr/calculatrice/>

- D'autres pistes :
<http://groupes-premier-degre-36.tice.ac-orleans-tours.fr>